Задача №1

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.

ЗАДАНИЕ: вычислить таблицы значений и построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений u поперечных сечений прямого бруса (рис. 1).

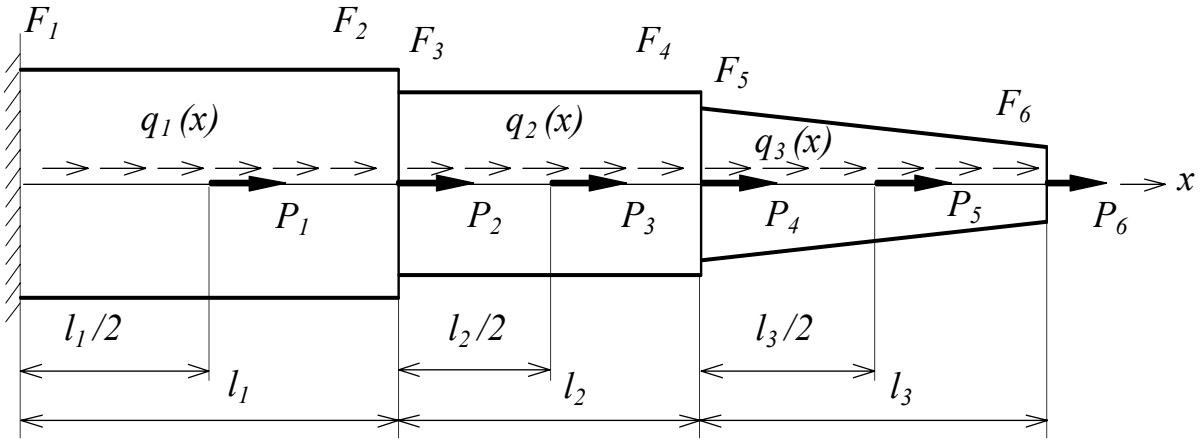


Рис. 1

Геометрически брус можно разделить на три участка. На i-ом участке (i =1, 2, 3) длиной l_i заданы F_{2i+1} , F_{2i} - площади левого и правого сечений участка бруса (на каждом участке принят линейный закон измененения площади по длине); P_{2i+1} , P_{2i} - сосредоточенные силы, приложенные в соответствии со схемой (рис. 1); $q_i\ (x)$ - продольная распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (заданы k_i - тангенс наклона в уравнении прямой и b_i - значение q_i на левой границе участка).

Для вычисления значений N, σ, u необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$N(x) = \int_{x}^{l_1+l_2+l_3} q(x)dx + \sum P_j \qquad (1)$$

В сумме (1) учитываются все сосредоточенные силы, приложенные на участке от x до $l_1+l_2+l_3$.

$$\sigma(x) = N(x) / F(x) \qquad (2)$$

$$u\ (x) = \frac{1}{E}\int_{0}^{x} \sigma\ (x)d\ x \qquad (3)$$

Для решения задачи требуется разбить брус на m силовых участков (в общем случае $m = 6$) и на каждом участке силовом вычислить требуемые величины. Решение представить в виде таблицы и эпюр. На каждом силовом участке рассчитать не менее трех точек.

Для определения варианта задания порядковый номер по групповому журналу перевести в двоичный код и дополнить нулями до 6-ти позиций (например №3=000011). В зависимости от значений в каждой позиции (0 или 1) по таблице определить исходные данные. (E=1.1·10 ^{8} кН / м ^{2})

№ позиции	1-ая			2-ая			3-ья		
значения	l_1	$F_1\cdot10^4$	$F_2\cdot10^4$	l_2	$F_3\cdot10^4$	$F_4\cdot10^4$	l_3	$F_5\cdot10^4$	$F_6\cdot10^4$
в позиции	м	м ^{2}	м ^{2}	м	м ^{2}	м ^{2}	м	м ^{2}	м ^{2}
0	0.5	5	3	0.4	4	3	0.5	3	3
1	0.3	4	4	0.7	5	3	0.4	4	2

№ позиции	4-ая				5-ая				6-ая			
значения	P_1	P_2	k_1	b_1	P_3	P_4	k_2	b_2	P_5	P_6	k_3	b_3
в позиции	кН	кН	кН/м^2	кН/м	кН	кН	кН/м^2	кН/м	кН	кН	кН/м^2	кН/м
0	0	10	5	2	0	-5	-4	-4	0	20	-5	-3
1	10	-10	0	0	-10	20	0	5	15	-5	0	0

При решении задачи возможны многие варианты программ. Рассмотрим на примере упрощенной схемы бруса (рис. 2) алгоритм одного из них.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

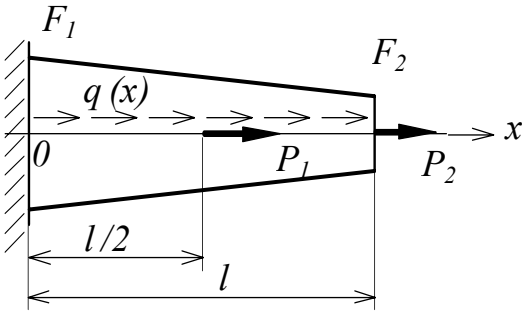


Рис. 2

Исходные данные: l = 1м , F_1= 4·10^{-4} м ^{2}, F_2 = 2·10^{-4} м ^{2}, P_1 = 10 Кн , P_2 = -20 Кн , k = 5 Кн / м ^{2}, b = -5 Кн / м .

Уравнение изменения площади поперечного сечения бруса F(x) запишется в виде

$$F(x) = -2\cdot10^{-4}\,x + 4\cdot10^{-4}$$

Закон изменения распределенной нагрузки

$$q(x) = 5\,x - 5$$

Так как при $x = l / 2$ в точке приложения силы P_1 продольная сила N терпит разрыв, брус необходимо разбить на два силовых участка: 1-ый участок $0 < x < l / 2$; 2-ой участок $l / 2 < x < l$. При этом в точке $x = l / 2$ величины N и σ необходимо вычислить дважды: слева и справа от точки.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ.

Введем в рассмотрение массив $X(6)$, элементы которого числено равны координатам точек в которых вычисляются N, σ, u. При трех точках на каждом участке и равномерной сетке получим:

$$x_1 = 0,\quad x_2 = l/4,\quad x_3 = l/2,\quad x_4 = l/2,\quad x_5 = 3l/4,\quad x_6 = l.$$

Для вычислений и хранения усилий, напряжений и перемещений в точках x_i, будем использовать массивы $N(6)$, $\sigma(6)$, $u(6)$.

Вычисление усилий методом сечений удобно начинать со свободного конца бруса. Из расчетной схемы видно, что

$$N_6 = P_2 .$$

Для N_5 из (1) имеем:

$$N_5 = N_6 + \int_{x_5}^{x_6} q(x)dx$$

Вычисляя последний интеграл по формулам трапеций с использованием значений функции $q(x)$ только на концах отрезка интегрирования (т. к. $q(x)$ - линейная функция, то результат будет точным), получим

$$N_5 = N_6 + [q(x_6) + q(x_5)]\, h/2$$

где $h = x_6 - x_5$ - шаг интегрирования. В рассматриваемом случае для равномерности сетки независимо от пределов интегрирования шаг постоянен и равен $h = l/4$.

Для N_4 аналогично получим формулу

$$N_4 = N_5 + [q(x_5) + q(x_4)]\, l/8$$

В точке разрыва имеем: $N_3 = N_4 + P_1$

и далее:

$$N_2 = N_3 + [q(x_3) + q(x_2)]\, l/8$$

$$N_1 = N_2 + [q(x_2) + q(x_1)]\, l/8$$

Если увеличить длину массива N на единицу и ввести значение $N_7 = 0$, то вместо $N_6 = P_2$ получим $N_6 = N_7 + P_2$.

Тогда можно независимо от количества силовых участков и точек разбиения внутри участков записать следующие рекуррентные формулы для определения усилий в поперечных сечениях бруса:

$N_{m\cdot k+1} = 0$ - значение усилий за пределом бруса;

$N_{j\cdot k} = N_{j\cdot k+1} + P_j$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-ый стык (стык j-го и j+1 -го силовых участков);

$N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h/2$, i = j·k +1 , ... , (j - 1)·k +1 - для точек внутри j-го силового участка.

Здесь: m - число участков; k - количество точек на участке; h - шаг разбиения. Если при разбиении используется неравномерная сетка, то $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Зная усилия и напряжения (последние определяются в соответствии с формулой (2)), можно вычислить перемещения в контрольных точках

по формуле (3). При интегрировании по формуле трапеций (в данном случае это приводит к определенной ошибке) получим:

$$u_1 = 0\,, \qquad u_2 = u_1 + [\sigma_1 + \sigma_2]\, l/(8E)\,, \quad u_3 = u_2 + [\sigma_2 + \sigma_3]\, l/(8E)$$

$$u_4 = u_3\,, \qquad u_5 = u_4 + [\sigma_4 + \sigma_5]\, l/(8E)\,, \quad u_6 = u_5 + [\sigma_5 + \sigma_6]\, l/(8E)$$

или в общем случае:

$u_1 = 0$, - в начале отрезка;

$u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h/(2E)$, i от (j -1)·k +2 до j·k с шагом 1- внутри j-го участка; (6)

$u_{j\cdot k+1} = u_{j\cdot k}$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-й стык . (7)

Для обобщения формулы (7) на последний участок необходимо увеличить длину массива u до m+1.

После того, как выписаны все необходимые формулы, можно предложить следующий алгоритм вычислений:

- Описание массивов X (6) , N (7) , σ (6) , u (7) , P (6) .
- Описание функций $F(x)$, $q(x)$.
- Задание исходных данных (массивов X , P, значений k , m , l).
- Вычисление элементов массива N :σ

  внешний цикл по j от m до 1 с шагом -1

  $N_{j\cdot k} = N_{j\cdot k+1} + P_j$

  внутренний цикл по i от j·k -1 до (j - 1)·k +1 с шагом -1

  $N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h/2$

  конец внутреннего цикла

  конец внешнего цикла.
- Вычисление элементов массива σ по формулам (2) :

  цикл по i от 1 до m·k с шагом 1
- Вычисление элементов массива u :

  $u_1 = 0$

  внешний цикл по j от 1 до m с шагом 1

  внутренний цикл по i от (j -1)·k +2 до j·k с шагом 1

  $u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h/(2E)$

  конец внутреннего цикла

  $u_{j\cdot k+1} = u_{j\cdot k}$

  конец внешнего цикла.
- Печать значений x_i , N_i , σ_i , u_i :

  цикл по i от 1 до 6 с шагом 1

В качестве альтернативного можно предложить следующий вариант решения задачи. Интеграл, входящий в формулу для усилий (1) , вычислить аналитически. Это позволяет выражение для вычислений напряжений

оформить в программе как функцию. Перемещения при этом можно вычислять не по формуле трапеций по трем точкам на участке (как в предыдущей программе), а используя более точный метод (например, стандартную программу метода Гаусса QG8).